مسائل سری اول درس فرایندهای تصادفی

۱- ثابت کنید:
$$E\{Y \mid X \le 0\} = \frac{1}{F_X(0)} \int_{-\infty}^{0} E\{Y \mid X = x\} f_X(x)\, dx$$

۲- توابع توزیع و چگالی شرطی X با شرط $\{a < X \le b\}$ را بر حسب توابع توزیع $F_X(x)$ و چگالی $f_X(x)$ بیابید.

۳- نقطه‌ای به‌طور تصادفی از درون دایره‌ای به شعاع a انتخاب می‌شود. تابع چگالی احتمال طول وتر گذرا از این نقطه که بر شعاع گذرنده از آن نقطه عمود است، را به‌دست آورید. متوسط و واریانس این طول را محاسبه کنید.

۴- چراغ راهنمایی چهارراهی به‌مدت یک دقیقه سبز و به‌مدت نیم دقیقه قرمز می‌شود. اتومبیلی در لحظه‌ای کاملاً تصادفی و مستقل از کار چراغ به چهارراه رسیده است. توابع چگالی (pdf) و توزیع (cdf) و مشخصه (cf) و همچنین متوسط و واریانس زمان انتظار را برای این اتومبیل به‌دست آورید.

۵- متغیر تصادفی X یک متغیر تصادفی نرمال $X \sim N(m, s^2)$ است. متغیر تصادفی Y با متغیر تصادفی X رابطهٔ $Y = e^X$ را دارد.

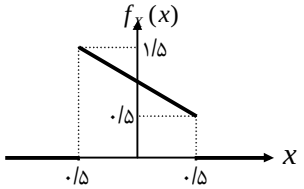
الف) متوسط و واریانس Y را بر حسب m و s^2 به‌دست آورید.

ب) تابع چگالی احتمال Y را به‌دست آورید.

۶- تابع پیوستهٔ $F_X(x)$ و تابع $f_X(x)$ ، به‌ترتیب تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X هستند. ثابت کنید اگر متغیر تصادفی U دارای توزیع یکنواخت بین صفر و یک باشد؛ $U \sim U(0,1)$، آنگاه متغیر تصادفی $Y = F_X^{-1}(U)$ دارای همان توزیع احتمال متغیر تصادفی X است، یعنی: $Y \sim f_X(y)$.

۷- تعداد تصادفات روزانه در یک شهر، دارای توزیع پواسون با متوسط a است. احتمال آن‌که یک تصادف منجر به فوت شود، p است. توزیع احتمال تعداد تصادفات منجر به فوت روزانه را بیابید.

۸- متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمالی به‌صورت مقابل است.
مقدار $\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}[X^k]$ چقدر است؟



۹- فرض کنید V یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازهٔ $[-1,1]$ و $X \in \{0,1\}$ یک متغیر تصادفی باینری مستقل از V و با جرم احتمال‌های $\Pr\{X=1\} = q$ و $\Pr\{X=0\} = 1-q$ است. بر حسب این‌دو متغیر تصادفی، $Y = \begin{cases} |V| & X=1 \\ -|V| & X=0 \end{cases}$ را تعریف می‌کنیم.

الف) $m_Y = \mathrm{E}[Y]$ را بیابید.

ب) چگالی احتمال شرطی $f_Y(y \mid x)$ را به‌ازای $x=1$ و $x=0$ به‌دست آورید.

پ) تابع توزیع و تابع چگالی احتمال Y را پیدا کنید.

۱۰- اگر X و Y مستقل از هم، دارای توزیع نمایی با پارامتر l باشند، تابع چگالی احتمال متغیر $Z = \frac{X}{X+Y}$ را بیابید.

۱۱- فرض کنید $X,Y \sim N(0,s^2)$ و دو متغیر،مستقل از هم هستند.

الف) تابع چگالی احتمال متغیرهای‌تصادفی $R=\sqrt{X^2+Y^2}$ و $q=\text{Arctan}\frac{Y}{X}$ را بیابید و نشان دهید R و q مستقل‌اند.

ب) نشان دهید متغیرهای تصادفی U و V مستقل از هم و دارای توزیع نرمال هستند.

$$U=\frac{X^2-Y^2}{\sqrt{X^2+Y^2}} \quad , \quad V=\frac{XY}{\sqrt{X^2+Y^2}}$$

۱۲- با استفاده از نامساوی چرنف ثابت کنید اگر $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$ که در آن $f_{X_i}(x)=e^{-x}u(x)$ و X_i ها مستقل از هم باشند، آن‌گاه:

$$P(Y\geq 2n)\leq(\frac{2}{e})^n$$

۱۳- متغیرهای تصادفی X_1, X_2 مستقل از هم و دارای توزیع $N(m,s^2)$ هستند. توزیع متغیر تصادفی Y یکنواخت و در بازهٔ $[\min(X_1,X_2),\max(X_1,X_2)]$ است. میانگین و واریانس Y را بیابید.

۱۴- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی تواماً نرمال با متوسط‌های صفر و واریانس‌های s^2 و ضریب همبستگی r هستند.

الف) ثابت کنید متغیرهای تصادفی $U\triangleq X-Y$ و $V\triangleq X+Y$ مستقل از هم هستند.

ب) مقدار $\text{E}[X^3-Y^3 \mid X-Y]$ را بیابید.

۱۵- اگر X,Y,Z متغیرهای تصادفی مستقل با تابع توزیع یکنواخت $U(0,2)$ باشند، مقدار $\text{E}[X \mid \min(X,Y,Z)]$ را بیابید.

۱۶- درایه‌های ماتریس $A_{n\times n}$ مستقل از هم دارای توزیع نرمال $N(0,s^2)$ هستند. مقدار متوسط و واریانس متغیر تصادفی $\det(A)$ چقدر است؟

۱۷- اگر متغیرهای تصادفی $X_1,X_2,...,X_n$ مستقل از هم و هریک دارای توزیع یکنواخت بین صفر و یک باشند، $X_i\sim U(0,1)$، آن‌گاه تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $Y=\frac{1}{X_1X_2...X_n}$ را بیابید.

۱۸- دو متغیر تصادفی X و Y با تابع چگالی احتمال توام $f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{5}{16}x^2y & 0<y<x\leq 2\\ 0 & Otherwise\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) تابع چگالی احتمال شرطی و کناری X و Y را به‌دست آورید.

ب) واریانس X و واریانس Y و همچنین ضریب همبستگی بین X و Y را به‌دست آورید.

پ) بهترین تخمین X بدون اطلاع از Y چیست و متوسط مربع خطای آن چقدر است؟

ت) بهترین تخمین X بر حسب Y کدام است و متوسط مربع خطای چنین تخمینی چقدر است؟

ث) بهترین تخمین X بصورت رابطه‌ای خطی بر حسب Y و همچنین متوسط مربع خطای آن را حساب کنید.

۱۹- سه متغیر تصادفی X_1، X_2 و Y مفروض هستند. می‌خواهیم با مشاهدهٔ X_1 و X_2 مقدار Y را با رابطه‌ای به‌فرم $\hat{Y}=a_1X_1+a_2X_2$ تخمین بزنیم بطوری‌که $p=\text{E}[(Y-\hat{Y})^2]$ حداقل شود. مقادیر a_1، a_2 و همچنین مینیمم خطا $p_{\min}$ را بر حسب ممان‌های X_1، X_2 و Y به‌دست آورید.

۲۰- توزیع احتمال توام سه متغیر تصادفی باینری X ، Y و Z در جدول زیر آمده است.

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
$\Pr\{X = x\ ,\ Y = y\ ,\ Z = z\}$	0	0.125	0.300	0.075	0.100	0.025	0	0.375

الف) آیا X و Y مستقل هستند؟

ب) آیا Z و Y مستقل هستند؟

پ) آیا X و Z مستقل هستند؟

ت) توزیع احتمال متغیرهای تصادفی شرطی $X \mid Z = 0$ و $Y \mid Z = 0$ را به‌دست آورید و در مورد استقلال آن‌ها اظهارنظر کنید.

۲۱- pdf توام X ، Y و Z به‌صورت مقابل است:

$$f_{XYZ}(x,y,z) = \begin{cases} 8xyz & 0 < x < 1\ ,\ 0 < y < 1\ ,\ 0 < z < 1 \\ 0 & Otherwise \end{cases}$$

الف) ضرایب همبستگی r_{XY} ، r_{YZ} و r_{XZ} را تعیین کنید.

ب) چگالی احتمال شرطی $f_{XYZ}(x,y,z \mid Y + Z > 1)$ را پیدا کنید.

پ) چگالی احتمال شرطی $f_X(x \mid Y + Z > 1)$ را به‌دست آورید.

۲۲- فرض کنید pdf توام X ، Y و Z به‌صورت مقابل است:

$$f_{XYZ}(x,y,z) = \frac{1}{2p\sqrt{p}} \exp-(x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 - \sqrt{2}xy)$$

الف) آیا X ، Y و Z تواماً نرمال هستند؟

ب) متوسط و ماتریس کواریانس بردار $[X,Y,Z]^T$ را بنویسید.

پ) تابع چگالی احتمال کناری بردار $[X,Z]^T$ را پیدا کنید.

۲۳- هر یک از متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, ..., X_n$ دارای توزیع نرمال $N(m, s^2)$ هستند و ضریب همبستگی بین دوبه‌دوی آن‌ها برابر با r است. متغیر تصادفی Y نیز یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای $B(n,p)$ و مستقل از X_i ها است. مجموع تعداد تصادفی از متغیرهای تصادفی X_i را S می‌نامیم.

$$S \triangleq \begin{cases} X_1 + X_2 + ... + X_Y & Y = 1,2,...,n \\ 0 & Y = 0 \end{cases} \quad , \quad P_Y(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

الف) مقدار متوسط و واریانس S را به‌دست آورید.

ب) اگر $r = 0$ باشد، تابع مشخصهٔ متغیر تصادفی S را بیابید.

۲۴- فرض کنید X_1 ، X_2 و X_3 سه متغیر تصادفی تواماً مستقل پواسن با متوسط‌های $\mathrm{E}[X_1] = 1$ ، $\mathrm{E}[X_2] = 2$ و $\mathrm{E}[X_3] = 3$ هستند. بر حسب آن‌ها سه متغیر تصادفی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$Y_1 = X_1$$
$$Y_2 = X_2 - X_1$$
$$Y_3 = X_3 - X_2$$

الف) ماتریس همبستگی بردار $\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3]^T$ را بنویسید.

ب) ماتریس کواریانس بردار $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, Y_3]^T$ را بنویسید.

پ) تابع مولد احتمال بردار $\mathbf{Y}$ یعنی $\Gamma_Y(\mathbf{z}) = \mathrm{E}[z_1^{Y_1} \cdot z_2^{Y_2} \cdot z_3^{Y_3}]$ را پیدا کنید.

ت) احتمال پیشامد $\{Y_1 = Y_2 = Y_3 = 3\}$ چقدر است؟

۲۵- فرض کنید متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, ..., X_n$ تواماً مستقل هستند و متوسط و واریانس هر یک نیز $m_i = \mathrm{E}[X_i]$ و $s_i^2 = \mathrm{Var}(X_i)$ معلوم است. در رابطه با آن‌ها بردار $\mathbf{Y}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 \\ Y_2 &= X_1 + 2X_2 \\ &\vdots \\ Y_n &= X_1 + 2X_2 + ... + nX_n \end{aligned}$$

الف) متوسط شرطی Y_n مشروط به معلوم بودن $Y_1, Y_2, ..., Y_{n-1}$ را پیدا کنید.

ب) واریانس شرطی Y_n مشروط به معلوم بودن $Y_1, Y_2, ..., Y_{n-1}$ را پیدا کنید.

پ) تابع چگالی احتمال X_iها را معلوم فرض کنید، $f_{X_i}(x_i) = f_i(x_i)$ ، و تابع چگالی احتمال بردار $\mathbf{Y}$ را بر حسب توابع $f_1(\cdot), f_2(\cdot), ..., f_n(\cdot)$ به‌دست آورید.

۲۶- فرض کنید متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, ..., X_n$ مستقل از یکدیگر بوده و توزیع یکسانی داشته باشند(iid)، مثلاً :

$$F_{X_i}(x_i) = F(x_i) \quad , \quad f_{X_i}(x_i) = f(x_i)$$

تابع چگالی احتمال هر یک از متغیرهای تصادفی زیر را بر حسب توابع $f(\cdot)$ و/یا $F(\cdot)$ بیان کنید.

$$Y_1 = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\} \quad , \quad Y_2 = \min\{X_1, X_2, ..., X_n\} \quad , \quad Y_3 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

۲۷- n متغیر تصادفی $X_1, X_2, ..., X_n$ مستقل از هم و با تابع‌های احتمال مشابه و معلوم در نظر بگیرید. در هر نقطه از فضای نمونه مقادیری را که این متغیرهای تصادفی اختیار می‌کنند را از بزرگ به کوچک مرتب می‌کنیم و بزرگ‌ترین آن‌ها را به متغیر تصادفی Z_1 و دومی را به متغیر تصادفی Z_2 و ... و کوچک‌ترین آن‌ها را به متغیر تصادفی Z_n نسبت می‌دهیم. تابع چگالی احتمال kامین متغیر تصادفی، Z_k، و همچنین تابع چگالی احتمال $Z = Z_1 - Z_n$ را به‌دست آورید.

۲۸- سه متغیر تصادفی X_1، X_2 و X_3 با ممان‌های مرتبه اول و دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$m_X = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad R_X = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

ثابت کنید بین این سه متغیر یک رابطهٔ خطی برقرار است و این رابطه را نیز به‌دست آورید.

۲۹- فضای نمونه‌ای به‌صورت بازهٔ بستهٔ $\Omega = [0,1]$ درنظر بگیرید و در فضای فوق اندازهٔ احتمال را نیز یکنواخت فرض کنید. تعیین کنید در هر یک از موارد زیر رشته‌های تصادفی تعریف شده روی فضای فوق به چه مفهومی متقارب هستند و به چه مفهومی متقارب نیستند.

الف) $$X_n(x) = \begin{cases} 1 & (n \text{ even } \& \ x > 0.5) \text{ or } (n \text{ odd } \& \ x < 0.5) \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

ب) $$X_n(x) = \begin{cases} 1 & x < 1/n \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

پ) $$X_n(x) = \begin{cases} n & x < 1/n \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

ت) $$X_n(x) = \begin{cases} 1 & 2^{-k} l \le z \le 2^{-k}(l+1) \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases} \qquad n = 2^k + l \ , \ k = 0,1,2,... \ , \ l = 0,1,2,...,2^k - 1$$